

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA



UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN : A20 – Probabilitas & Statistik
TANGGAL : Selasa, 29 November 2011
JAM : 9.00 WIB s.d.12.00 WIB

LAMA UJIAN : 180 Menit
SIFAT UJIAN : Tutup Buku

2011

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang.
10. Alat komunikasi (telepon seluler, pager, dan lain-lain) harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi.
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 5 (lima) hari kerja sejak tanggal pelaksanaan ujian.

PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Berilah tanda silang pada jawaban yang Saudara anggap benar di lembar jawaban. Jika Saudara telah menentukan jawaban dan kemudian ingin merubahnya dengan yang lain, maka coretlah jawaban yang salah dan silang jawaban yang benar.
4. Jangan lupa menuliskan nomor ujian Saudara pada tempat yang sediakan dan tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa menuliskan nomor ujian Saudara pada tempat yang disediakan dan tanda tangani Buku Ujian tanpa menuliskan nama Saudara.

KETENTUAN DAN PROSEDUR KEBERATAN SOAL UJIAN PAI

1. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 5 (lima) hari kerja sejak tanggal pelaksanaan ujian.
2. Semua pengajuan keberatan soal dialamatkan ke sanggahan.soal@gmail.com.
3. Pengajuan keberatan soal setelah tanggal tersebut (Poin No 1) tidak akan diterima dan ditanggapi.
4. Kunci Jawaban akan diumumkan ke website PAI dengan alamat www.aktuaris.org satu bulan sejak tanggal pelaksanaan ujian, setelah itu tidak ada pengajuan keberatan kunci jawaban.

1. Diketahui 3 himpunan tidak kosong A , B , dan C , dimana masing-masing himpunan tersebut saling beririsan. Maka di bawah ini yang merupakan bentuk sederhana dari himpunan $[(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B' \cap C')]$ adalah

 - A. $A \cap (B \cup C)$
 - B. $(A \cup B) \cup C$
 - C. $A - [A \cap (B \cup C)]$
 - D. $A' - [A \cap (B \cup C)]$

2. Banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ yang merupakan bilangan bulat non negatif adalah

 - A. 78
 - B. 72
 - C. 68
 - D. 64

3. Banyaknya solusi dari persamaan $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 21$ yang merupakan bilangan bulat non negatif dan $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 3$, $n_3 \geq 4$, dan $n_4 \geq 5$ adalah

 - A. 720
 - B. 360
 - C. 240
 - D. 120

4. Jika diketahui $E[5X + 1] = 3$ dan $E[X^2 + 2X + 3] = 10$. Maka nilai dari $E[2X^2 - X + 9]$ sama dengan

 - A. 19
 - B. 21
 - C. 24
 - D. 27

5. Jika diketahui $E[X] = 2$, $E[X^2] = 9$, dan $E[(X - 2)^2] = 0$. Maka nilai dari $\text{Var}(X)$ sama dengan

 - A. $25/6$
 - B. 3
 - C. $1/6$
 - D. 6

6. Dalam suatu percobaan pelemparan dadu yang seimbang, pertama sebuah dadu dilemparkan, kemudian jika muncul sisi dadu bernomor genap, maka sebuah koin yang seimbang akan dilempar, tetapi jika sisi dadu yang bernomor ganjil yang muncul, maka dadu tersebut akan dilemparkan kembali. Jika S adalah himpunan dari semua hasil percobaan di atas, maka jumlah anggota (kardinalitas) dari himpunan S adalah

A. 18
B. 24
C. 36
D. 48

7. Misalkan variabel acak X berdistribusi diskrit *uniform* dengan $x = 1, 2, \dots, n$. Maka nilai dari $Skew(X) = E[(X - \mu)^3]$ sama dengan

A. 0
B. $(n + 1)^3/2$
C. $(n + 1)^2 (2n + 1)/6$
D. $n(n + 1)^2/4$

8. Diketahui variabel acak X berdistribusi eksponensial dengan *mean* 1, dan didefinisikan variabel acak Y berdistribusi bersyarat $X - 2$, diberikan $X > 2$, atau dapat ditulis sebagai $Y = X - 2 \mid X > 2$. Maka Y akan berdistribusi eksponensial dengan *mean* sama dengan
- (Petunjuk : $\Pr[Y > c] = \Pr[X - 2 > c \mid X > 2]$ untuk $c > 0$)

A. 1
B. 2
C. $\frac{1}{2}$
D. suatu konstanta c yang nilainya > 2

9. Misal variabel acak X dan Y berdistribusi normal *bivariate* dengan $E(X) = 0$ dan $E(Y) = 1$. Dan diketahui juga sebagai berikut :

$$E[X \mid Y = 9] = 8 \text{ dan } E[Y \mid X = 9] = 2$$

Maka nilai dari koefisien korelasi antara X dan Y adalah ρ_{XY} sama dengan

A. $-1/2$
B. $1/9$
C. $1/6$
D. $1/3$

10. Misal fungsi probabilitas diskrit $p(x,y) = k(x^2 + xy)$ untuk $x = 1,2$ dan $y = 1,2,3$. Berikut adalah pernyataan yang berhubungan dengan fungsi probabilitas di atas :

- (i) $k = 1/33$
- (ii) $E(X) = 75/33$ dan $E(Y) = 72/33$
- (iii) $E[X | Y = 2] = 19/11$
- (iv) $E(XY) = 124/33$

Maka pernyataan di atas yang benar adalah pernyataan

- A. (i) dan (ii)
- B. (i), (ii) dan (iii)
- C. (i), (iii) dan (iv)
- D. semuanya benar

11. Dalam suatu percobaan, koin dilemparkan sampai dengan sisi gambar muncul untuk kedua kalinya. Jika p adalah probabilitas sisi gambar muncul dalam satu lemparan, dan diasumsikan bahwa setiap lemparan *independent* dari lemparan sebelumnya. Misalkan X adalah variabel acak berapa kali lemparan koin dilakukan. Maka nilai dari $\Pr(X = n)$, dimana $n \geq 2$ sama dengan

- A. $np(1-p)$
- B. $(n-1)p(1-p)^{n-1}$
- C. $(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$
- D. $[(n-1)p(1-p)]^2$

12. Tiga puluh benda telah tersusun rapi membentuk persegi panjang sebagai berikut :

A1	A2	A3	A4	A5
A6	A7	A8	A9	A10
A11	A12	A13	A14	A15
A16	A17	A18	A19	A20
A21	A22	A23	A24	A25
A26	A27	A28	A29	A30

Maka banyaknya cara untuk membentuk suatu himpunan yang terdiri dari 3 benda (dipilih dari 30 benda di atas) yang berbeda, sedemikian sehingga tidak ada dua benda dalam himpunan tersebut yang berada pada kolom atau baris yang sama adalah

- A. 7.200
- B. 4.560
- C. 1.200
- D. 760

13. Diketahui X dan Y adalah variabel acak dari fungsi *joint probability density* berikut :

$$f(x,y) = \frac{1}{2} e^{-x} \sin(y), \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \pi$$

Maka nilai dari $\Pr[(X < 1) \cap (Y < \pi/2)]$ sama dengan

- A. $(1 - e^{-1})/2$
 B. $(e - 1)/2$
 C. e/π
 D. $2/(1 - e^{-1})$
14. Perusahaan Asuransi Jiwa ABC memiliki portofolio yang terdiri dari beberapa polis. Jika polis-polis dalam portofolio tersebut saling *independent* satu sama lainnya, dan setiap polis dalam portofolio tersebut memiliki klaim yang berdistribusi ekponensial dengan *mean* 100, dan premi untuk setiap polis sebesar 120. Perusahaan asuransi tersebut menginginkan probabilitas bahwa paling sedikit 95% dari premi yang diterima akan cukup untuk mencover klaim. Dengan menggunakan pendekatan distribusi normal, maka minimum jumlah polis yang dibutuhkan dalam portofolio tersebut agar keinginan perusahaan asuransi tersebut dapat tercapai adalah
- A. 62
 B. 64
 C. 66
 D. 68
15. Suatu dadu yang tidak seimbang memiliki probabilitas munculnya setiap sisinya sebagai berikut :

sisi bernomor	probabilitas
1	p
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/3 - p$

Jika variabel acak X adalah hasil dari sekali lemparan dadu tersebut. Maka besar nilai p sedemikian sehingga variansi $\text{Var}(X)$ akan maksimal adalah

- A. $1/3$
 B. $1/4$
 C. $1/6$
 D. $1/12$

16. Misal variabel acak X mempunyai fungsi pembangkit momen sebagai berikut :

$$M_X(t) = 0,10 + 0,18t + 0,12t^2 + 0,37t^3 + 0,23t^4$$

Maka nilai dari $\text{Var}(X)$ sama dengan

- A. 24,63
- B. 7,74
- C. 4,11
- D. 2,78

17. Fungsi *joint probability density* dari variabel acak X dan Y sebagai berikut :

$$f(x,y) = x + y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

Fungsi *joint probability density* dari variabel acak Y dan Z sebagai berikut :

$$g(y,z) = 3(y + \frac{1}{2})z^2, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1$$

Di bawah ini yang merupakan fungsi *joint probability density* dari variabel acak X dan Z dalam domain $0 < x < 1, \quad 0 < z < 1$ adalah

- A. $x + 3z^2/2$
- B. $x + \frac{1}{2} + 3z^2$
- C. $3(x + \frac{1}{2})z^2$
- D. $4xz$

18. Sebuah perusahaan asuransi jiwa memiliki 10.000 pemegang polis, dan setiap pemegang polis dapat diklasifikasikan sebagai berikut :

- (i) muda atau tua
- (ii) pria atau wanita
- (iii) menikah atau belum menikah

Dari 10.000 pemegang polis tersebut, diketahui 3.000 orang masih muda, 4.600 orang adalah pria, dan 7.000 orang sudah menikah. Diketahui juga 1.320 orang adalah pria muda, 3.010 orang adalah pria menikah, dan 1.400 orang adalah menikah muda. Dan diketahui juga 600 orang adalah menikah, muda dan pria. Maka banyaknya pemegang polis yang muda, wanita, dan belum menikah sama dengan

- A. 280 orang
- B. 423 orang
- C. 486 orang
- D. 880 orang

19. Cuaca di kota Jakarta dan Denpasar memiliki suhu yang tinggi dimusim kemarau. Misalkan suhu harian di kota Jakarta pada musim kemarau berdistribusi normal dengan *mean* 34 derajat Celcius dan deviasi standar 3 derajat Celsius, sedangkan suhu harian di kota Denpasar pada musim kemarau berdistribusi normal dengan *mean* 32 derajat Celcius dan deviasi standar 4 derajat Celsius. Diasumsikan suhu harian kedua kota tersebut saling *independent*. Maka probabilitas bahwa kota Jakarta dan Denpasar akan memiliki suhu udara dengan selisih paling besar 1 derajat Celcius pada waktu tertentu dalam suatu musim kemarau sama dengan

- A. 0,1014
- B. 0,1274
- C. 0,1464
- D. 0,1646

20. Diketahui X_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah variabel-variabel acak yang saling *independent*, dan jumlah dari seluruh variabel acak X_i tersebut adalah variabel acak lain, yaitu $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Berikut ini adalah 4 pernyataan yang berhubungan dengan distribusi variabel acak X_i dan Y . Jika X_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ diketahui berdistribusi :

- (i) Poisson maka Y berdistribusi Poisson
- (ii) Exponensial maka Y berdistribusi Exponensial
- (iii) Kuadrat maka Y berdistribusi Chi Kuadrat
- (iv) Normal maka Y berdistribusi Normal

Maka banyaknya pernyataan yang benar dari 4 pernyataan di atas adalah

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

21. Dalam suatu studi *marketing* terdapat dua pertanyaan sebagai berikut :

- (i) Apakah kamu memiliki polis asuransi kesehatan kumpulan?
- (ii) Apakah kamu anggota dari suatu klub *fitness*?

Diperoleh hasil bahwa 80% responden menjawab "YA" pada paling sedikit satu dari kedua pertanyaan di atas dan 80% menjawab "TIDAK" pada paling sedikit satu dari kedua pertanyaan di atas. Maka persentase responden yang menjawab "YA" pada tepat satu pertanyaan dari kedua pertanyaan di atas sama dengan

- A. 30%
- B. 40%
- C. 50%
- D. 60%

22. Untuk setiap himpunan kejadian A dan B, maka pernyataan di bawah ini yang benar adalah

- A. $\Pr[A \cap B] \leq \Pr[A] \times \Pr[B]$
- B. $\Pr[A \cup B] \geq \Pr[A] + \Pr[B]$
- C. $\Pr[A \cap B'] \geq \Pr[A] - \Pr[B]$
- D. $\Pr[A | B] = \Pr[B | A]$

23. Digit biner dikirimkan melalui suatu sistem telekomunikasi. Jika angka 1 dikirimkan, maka akan diterima sebagai angka 1 juga memiliki probabilitas 0,95 dan akan diterima sebagai angka 0 memiliki probabilitas 0,05. Jika angka 0 dikirimkan, maka akan diterima sebagai angka 0 juga memiliki probabilitas 0,99 dan akan diterima sebagai angka 1 memiliki probabilitas 0,01. Serangkaian angka-angka 0 dan 1 tersebut akan dikirimkan secara acak urutannya, dimana angka 1 dan 0 masing-masing memiliki kemungkinan untuk dikirimkan yang sama besar. Jika suatu digit angka diterima sebagai angka 1, maka nilai probabilitas bahwa yang dikirimkan adalah angka 1 juga sama dengan

- A. 0,9428
- B. 0,9648
- C. 0,9896
- D. 0,9995

24. Misalkan terjadi suatu kebakaran, model untuk kerusakan akibat kebakaran pada suatu properti tertentu dapat dinyatakan sebagai fungsi *joint probability density*, dengan variabel acak X (kerusakan struktur) dan Y (kerusakan isi/interior) sebagai berikut :

$$f(x,y) = ax + by, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \quad (\text{dalam suatu unit skala})$$

Jika diketahui $\Pr[X > Y] = 5/6$, maka nilai ekspektasi dari total kerusakan akibat dari kebakaran tersebut adalah $E[X + Y]$ yang nilainya sama dengan

- A. 10/9
- B. 16/9
- C. 28/9
- D. 34/9

25. Diketahui variabel acak $X \sim \Gamma(4,6)$, maka nilai dari $E\left[\left(\frac{X}{6}\right)^5\right]$ sama dengan

- A. 6.720
- B. 3.360
- C. 1.680
- D. 1.120

26. Variabel acak X memiliki fungsi pembangkit momen sebagai berikut :

$$M_X(t) = Ae^t + Be^{2t}$$

Jika diketahui $\text{Var}(X) = 2/9$ dan $A < 1/2$. Maka nilai dari $E(X)$ sama dengan

- A. $1/3$
- B. $5/3$
- C. 1
- D. $2/3$

27. Variabel acak X dan Y memiliki fungsi *joint probability density* sebagai berikut :

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}, \quad x > 0, y > 0$$

Jika variabel acak Z didefinisikan sebagai $Z = e^{-(x+y)}$, maka fungsi *probability density* dari Z adalah

- A. $f_Z(u) = 1$, untuk $0 < u < 1$
- B. $f_Z(u) = u^{-2}$, untuk $u > 1$
- C. $f_Z(u) = e^{-u}$, untuk $u > 0$
- D. $f_Z(u) = -\ln(u)$, untuk $0 < u < 1$

28. Misalkan suatu ukuran hamburger berdistribusi normal dengan *mean* 70 gram dan standar deviasi 5 gram. Jika sampel yang terdiri dari 4 hamburger dipilih secara acak, maka probabilitas bahwa *mean* dari sampel tersebut lebih kecil dari 77 gram sama dengan

- A. 0,9998
- B. 0,9974
- C. 0,5026
- D. 0,4974

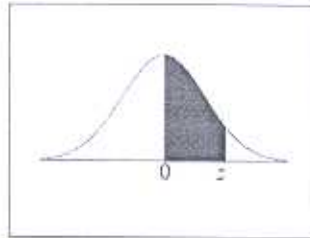
29. Diketahui variabel acak $X \sim \text{Exp}(1)$ dan variabel acak $Y \sim \text{Unif}[0,2]$, dimana kedua variabel acak tersebut *independent*. Maka nilai dari $E[\text{Max}(X,Y)]$ sama dengan

- A. 0,14
- B. 1,25
- C. 1,43
- D. 2,37

30. Diketahui variabel acak diskrit N bernilai non negatif, berdistribusi *Binomial* dengan *mean* 2, serta memiliki parameter n dan p . Atau secara umum dapat dituliskan sebagai $N \sim \text{Binomial}(n, p)$. Maka nilai dari $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[N = 0]$ sama dengan

- A. e^{-2}
- B. e^{-1}
- C. 0
- D. e

Standard Normal Distribution Table



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998