PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA

UJIAN PROFESI AKTUARIS

MATA UJIAN : A70 - Teori Risiko
TANGGAL : Selasa, 24 Mei 2011
JAM : 13:30 sd 16:30

LAMA UJIAN : 180 Menit
SIFAT UJIAN : Tutup Buku

2011

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

TATA TERTIB UJIAN

1. Setiap Kandidat harus berada di ruang ujian selambat-lambatnya 15 (lima belas) menit sebelum ujian dimulai.
2. Kandidat yang datang 1 (satu) jam setelah berlangsungnya ujian dilarang memasuki ruang ujian dan mengikuti ujian.
3. Kandidat dilarang meninggalkan ruang ujian selama 1 (satu) jam pertama berlangsungnya ujian.
4. Setiap kandidat harus menempati bangku yang telah ditentukan oleh Komisi Penguji.
5. Buku-buku, diktat, dan segala jenis catatan harus diletakkan di tempat yang sudah ditentukan oleh Pengawas, kecuali alat tulis yang diperlukan untuk mengerjakan ujian dan kalkulator.
6. Setiap kandidat hanya berhak memperoleh satu set bahan ujian. Kerusakan lembar jawaban oleh kandidat, tidak akan diganti. Dalam memberikan jawaban, lembar jawaban harus dijaga agar tidak kotor karena coretan.
7. Kandidat dilarang berbicara dengan/atau melihat pekerjaan kandidat lain atau berkomunikasi langsung ataupun tidak langsung dengan kandidat lainnya selama ujian berlangsung.
8. Kandidat dilarang menanyakan makna pertanyaan kepada Pengawas ujian.
9. Kandidat yang terpaksa harus meninggalkan ruang ujian untuk keperluan mendesak (misalnya ke toilet) harus meminta izin kepada Pengawas ujian dan setiap kali izin keluar diberikan hanya untuk 1 (satu) orang.
10. Alat komunikasi (telepon seluler, pager, dan lain-lain) harus dimatikan selama ujian berlangsung.
11. Pengawas akan mencatat semua jenis pelanggaran atas tata tertib ujian yang akan menjadi pertimbangan diskualifikasi.
12. Kandidat yang telah selesai mengerjakan soal ujian, harus menyerahkan lembar jawaban langsung kepada Pengawas ujian dan tidak meninggalkan lembar jawaban tersebut di meja ujian.
13. Kandidat yang telah menyerahkan lembar jawaban harus meninggalkan ruang ujian.
14. Kandidat dapat mengajukan keberatan terhadap soal ujian yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai kepada komisi penguji selambat-lambatnya 5 (lima) hari kerja sejak tanggal pelaksanaan ujian.

PERSATUAN AKTUARIS INDONESIA
Komisi Penguji

PETUNJUK MENGERJAKAN SOAL

Ujian Pilihan Ganda

1. Setiap soal akan mempunyai 4 (empat) pilihan jawaban di mana hanya 1 (satu) jawaban yang benar.
2. Setiap soal mempunyai bobot nilai yang sama dengan tidak ada pengurangan nilai untuk jawaban yang salah.
3. Berilah tanda silang pada jawaban yang Saudara anggap benar di lembar jawaban. Jika Saudara telah menentukan jawaban dan kemudian ingin merubahnya dengan yang lain, maka coretlah jawaban yang salah dan silang jawaban yang benar.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara pada** tempat yang sediakan dan **tanda tangani lembar jawaban tersebut tanpa menuliskan nama Saudara.**

Ujian Soal Esay

1. Setiap soal dapat mempunyai lebih dari 1 (satu) pertanyaan, Setiap soal mempunyai bobot yang sama kecuali terdapat keterangan pada soal.
2. Tuliskan jawaban Saudara pada Buku Jawaban Soal dengan jelas, rapi dan terstruktur sehingga akan mempermudah pemeriksaan hasil ujian.
3. Saudara bisa mulai dengan soal yang anda anggap mudah dan tuliskan nomor jawaban soal dengan soal dengan jelas.
4. Jangan lupa **menuliskan nomor ujian Saudara** pada tempat yang disediakan dan **tanda tangani Buku Ujian tanpa** menuliskan nama Saudara.

Informasi berikut digunakan untuk soal 1 – 4. Besaran klaim di bawah ini (dalam juta) di amati dalam sebuah rentang pengamatan: 3, 4, 8, 10, 12, 13, 14, 25, 40, 45.

1. Berapa nilai estimasi dari θ yaitu parameter dari distribusi eksponensial data tersebut dengan menggunakan pendekatan metode momen.
   a. 12,5
   b. 13,9
   c. 17,4
   d. 18,0

2. Berapa nilai estimasi dari θ yaitu parameter dari distribusi eksponensial data tersebut dengan menggunakan pendekatan metode percentile, apabila diambil percentile 50%.
   a. 12,5
   b. 13,9
   c. 17,4
   d. 18,0

3. Apabila perusahaan asuransi menerapakan angka maksimum klaim sebesar 30, dan distribusi eksponensial dengan parameter seperti no 2 di atas, berapakah angka ekspektasi pembayaran klaim E[X ⊠ 30]
   a. 12,5
   b. 14,6
   c. 14,9
   d. 16,5

4. Berapa nilai dari θ untuk parameter dari distribusi inverse eksponensial dengan metode Maximum Likelihood Estimation
   a. 6,5
   b. 8,9
   c. 12,5
   d. 12,9

Pertanyaaan no 5 – 8 menggunakan data di bawah ini berdasarkan 80 data yang dikelompokkan:

Interval	Jumlah data
(0,50]	4
(50,100]	7
(100,200]	9
(200,400]	16
(400,1000]	29
(1000,2000]	12
(2000,5000]	3

5. Berapa estimasi empiris (Empirical Estimate) dari Variansi untuk X (5000 terdekat)
    a. 550.000
    b. 565.000
    c. 580.000
    d. 595.000

6. Berapa nilai ekspektasi dengan limit 400 atau E[X ⊠ 400]
    a. 295
    b. 305
    c. 425
    d. 695

7. Apabila rata-rata sampel dalam interval 2 sampai 7 adalah 72, 160, 310, 750, 1600 dan 4500. Rata-rata interval 1 tidak diketahui, apabila estimasi dari E[X ⊠ 1000] adalah 547,175 berapakah rata-rata interval 1 tersebut:
    a. 15
    b. 20
    c. 25
    d. 30

8. Tentukan estimasi empiris dari percentile ke-60 dari X
    a. 648
    b. 652
    c. 656
    d. 668

9. Dalam sebuah studi klaim, diketahui bahwa tidak ada dua klaim di waktu yang sama. Data tidak disensor atau di-truncate. Apabila estimasi Nelson Aalen untuk cumulative hazard function H (t), setelah klaim kedua adalah 23/132. Berapakah estimasi Nelson Aalen untuk cumulative hazard function H(t) setelah klaim keempat.
    a. 0,35
    b. 0,37
    c. 0,39
    d. 0,41

10. X merepresentasikan besaran dari sebuah klaim, dan mempunyai rata-rata 5 dan variansi 25. Apabila diketahui bahwa P = 0,9 dan k = 0,05. Berapa klaim yang dibutuhkan untuk mencapai full credibility
    a. 1082
    b. 1083
    c. 5412
    d. 5413

11. Sebuah distribusi binomial dengan n = 3 dan p = 0,4 disimulasikan dengan menggunakan metode inverse transform dengan angka random uniform: 0,31; 0,71; 0,66; 0,48; 0,19. Berapa banyak dari angka random tersebut yang menghasilkan angka 2?
    a. 2
    b. 3
    c. 4
    d. 5

Untuk nomor 12 - 13:
Sebuah jenis pertanggungan diketahui mempunyai tiga kelompok risiko A, B, dan C yang sama jumlah tertanggungnya. Setiap tertanggung memiliki peluang yang sama sebesar 50% untuk tidak klaim dalam satu tahun dan 50% kemungkinan untuk memasukkan satu klaim. Setiap klaim besarnya adalah 1 atau 2. Distribusi dari besarnya klaim apabila diketahui terjadi klaim adalah sebagai berikut:
P(klaim sebesar x | Group A dan memasukkan klaim) : 2/3 untuk x = 1 dan 1/3 untuk x = 2
P(klaim sebesar x | Group B dan memasukkan klaim) : 1/2 untuk x = 1 dan 1/2 untuk x = 2
P(klaim sebesar x | Group C dan memasukkan klaim) : 5/6 untuk x = 1 dan 1/6 untuk x = 2
Seorang tertanggung dipilih secara acak dan diketahui memasukkan klaim sebesar 2.

12. Berapa besar kemungkinan bahwa tertanggung tersebut adalah Group A?
    a. 1/6
    b. 1/3
    c. 1/2
    d. 2/3

13. Berapa Premi Bayesian nya?
    a. 25/36
    b. ¾
    c. 29/36
    d. 31/36

Soal 14 dan 15 berdasarkan data dari 25 orang yang diamati waktu sampai meninggalnya atau hidup sampai masa pengamatan berakhir (right censoring +): 2, 3, 3, 3+, 4, 4, 4, 4, 4+, 5+, 6, 6, 7, 7, 7, 7+, 7+, 8, 9, 10, 12+, 13, 13, 14, 16

14. Berapa nilai survival sampai tahun ke -11 dengan metode Kaplan Meier atau $S_{25}(11)$?
    a. 0,30
    b. 0,31
    c. 0,32
    d. 0,33

15. Berapa nilai survival sampai tahun ke -11 dengan metode Nelson Aalen atau $\hat{S}(11)$?
    a. 0,30
    b. 0,31
    c. 0,32
    d. 0,33

16. Tiga nilai observasi untuk sebuah random variable X adalah 1, 1, dan 4. Estimasi dari central moment ketiga dari X dengan estimator

$$g(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{3}\sum (X_i - \bar{X})^3$$

Tentukan bootstrap estimate untuk mean square error dari g
   a. Kurang dari 3,5
   b. Antara 3,5 dan 4
   c. Antara 4 dan 4,5
   d. Lebih dari 4,5

17. Anda diberi informasi sebagai berikut:

Sebuah studi mortalita menyangkut n jiwa
Tidak ada yang disensor dan tidak dua orang meninggal pada saat yang sama
t_x adalah waktu kematian yang ke-x
Estimasi Nelson-Aalen untuk fungsi cumulative hazard rate $\hat{H}(t_2) = \frac{39}{380}$
Tentukan estimasi Kaplan-Meier fungsi survival untuk t_9
   a. Kurang dari 0,56
   b. Antara 0,56 dan 0,58
   c. Antara 0,58 dan 0,60
   d. Lebih dari 0,60

18. Klaim saling independen dan mempunyai distribusi Poisson yang identik dengan mean Θ sedangkan prior distribution function untuk Θ adalah $F(\theta) = 1 - (\frac{1}{1+\theta})^{2,6}, \theta > 0$, lima buah klaim tercatat, tentukan Buhlmann credibility factor
   a. Kurang dari 0,6
   b. Antara 0,6 dan 0,7
   c. Antara 0,7 dan 0,8
   d. Lebih dari 0,8

19. Sebuah perusahaan mengasuransikan 100 orang usia 65, Probabilitas meninggal untuk masing-masing orang adalah sebesar 0,03 tiap tahunnya. Kematian antar orang adalah independen, Dengan metode inverse untuk mensimulasikan jumlah kematian dalam satu tahun. Nilai random yang dihasilkan adalah 0,20 ; 0,03 ; 0,09. Hitung rata-rata nilai hasil simulasi.
   a. 1/3
   b. 1
   c. 5/3
   d. 7/3

20. Berikut adalah data klaim yang dihasilkan dari sebuah distribusi pareto. 130, 20, 350, 218, 1822. Dengan metode momen, tentukan nilai α dari distribusi pareto tersebut
   a. Kurang dari 3,5
   b. Antara 3,5 dan 4

c. Antara 4 dan 5
d. Lebih dari 5

21. Diketahui jumlah klaim mengikuti distribusi negative binomial dengan parameter r dan $\beta = 3$. Ukuran klaim mengikuti distribusi berikut: klaim sebesar 1, kemungkinan 0,4, klaim sebesar 10, kemungkinan 0,4 dan klaim sebesar 100 kemungkinan 0,2. Jumlah klaim independen terhadap ukuran klaim. Tentukan jumlah klaim yang dibutuhkan untuk aggregate losses di dalam 10% dari expected aggregate losses dengan probability sebesar 95%.
   a. Kurang dari 1200
   b. Antara 1200 dan 1600
   c. Antara 1600 dan 2000
   d. Lebih dari 2000

22. Apabila diketahui bahwa setiap risiko maksimum melaporkan satu klaim setiap tahun dan probabilitynya sebgai berikut

Tipe Risiko	Prior Probability	Probability claim tahunan
I	0,7	0,1
II	0,2	0,2
III	0,1	0,4

Satu buah risiko yang dipilih secara acak melaporkan 3 klaim selama 6 tahun pertama, berapakah posterior probability untuk klaim di tahun ke-7
   a. 0,28
   b. 0,33
   c. 0,40
   d. 0,46

23. Berikut adalah informasi mengenai dua jenis produk, di mana X adalah kerugian untuk setiap tertanggung

	Produk 1	Produk 2
Jumlah tertanggung	25	50
$E(X)$	380	23
$E(X^2)$	365.000	....

Anda juga diberi informasi hasil analsis bahwa Buhlmann k value adalah sebesar 2,65
Hitunglah Variansi dari Produk 2
   a. 2.280
   b. 2.810
   c. 7.280
   d. 28.320

24. Anda diberitahu informasi berikut mengai dua jenis risiko:

Risiko A, mempunyai distribusi jumlah klaim mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 1 klaim per tahun dan distribusi besar klaim mengikuti distribusi exponential dengan rata-rata 1

Risiko B, mempunyai distribusi jumlah klaim mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 3 klaim per tahun dan distribusi besar klaim mengikuti distribusi exponential dengan rata-rata 3

Sebuah risiko dipilih secara acak dan hasil pengamtan menunjukkan bahwa terjadi 2 klaim dalam satu tahun. Masing2 besarnya adalah 1 dan 3. Hitung ekspektasi posterior dari kalim keseluruhan untuk risiko ini tahun depan

a. Kurang dari 2
b. Antara 2 – 4
c. Antara 4 – 6
d. Antara 6 – 8

25. Tempatkan natural Spline untuk fungsi sin $(\frac{\pi x}{2})$ pada titik 0, 1/3 dan 1. Tentukan perkiraan untuk sin $(\frac{\pi}{8})$ dengan menggunakan spline

a. 0,35
b. 0,37
c. 0,39
d. 0,42

26. Untuk sebuah kumpulan risiko yang independen, diketahui:

Risiko terbagi menjadi dua kelas A dan B
Jumlah tertanggung sama banyak antara kelas A dan kelas B
Untuk semua jenis risiko, kemungkinan satu kali klaim sebesar 20% dan kemungkinan tidak terjadi klaim sebesar 80%
Semua klaim di risiko kelas A sebesar 2 dan semua klaim di risiko kelas B sebesar c.
Sebuah risiko dipilih secara acak dan kerugian total dalam satu tahun dicatat. Apabila kita akan memprediksi kerugian untuk risiko yang sama dalam tahun depan, berapa limit dari Buhlmann Credibility factor apabila c mendekat ke tak hingga.

a. 0
b. 1/9
c. 4/5
d. 8/9

27. 15 pasien kanker diobservasi dari waktu diagnosis sampai meninggal atau akhir periode observasi yaitu 36 bulan. Kematian yang terjadi adalah sebagai berikut:

Satu kematian di bulan ke-36, dua kematian di bulan ke-15, 24 dan 34, tiga kematian di bulan ke-20 dan *d* kematian di bulan ke-30.
Nelson Aalen estimate $\hat{H}(35) = 1{,}5641$. Hitung Nelson Aalen estimate untuk varians dari $\hat{H}(35)$

a. Kurang dari 0,10
b. Antara 0,10 dan 0,15
c. Antara 0,15 dan 0,20
d. Antara 0,20 dan 0,25

28. Informasi berikut diketahui untuk sebuah random sample:

    Jumlah sampel 5
    Sampel berasal dari distribusi Weibull dengan $\tau=2$.
    Dua dari sampel diketahui lebih besar dari 50, dan sampel yang lain adalah 20, 30, dan 45
    Hitung θ dengan metode maximum likelihood estimate.
    a. Kurang dari 40
    b. Antara 40 dan 45
    c. Antara 45 dan 50
    d. Antara 50 dan 55

29. Sebelum mengamati pola dari sebuah klaim, kita berasumsi bahwa klaim mengikuti distribusi Pareto dengan parameter θ = 10 dan α = 1 atau 2 atau 3 dengan kemungkinan yang sama. Kemudian sebuah klaim berukuran 20 terjadi. Tentukan posterior probability bahwa klaim berikutnya lebih dari 30
    a. 0,06
    b. 0,11
    c. 0,15
    d. 0,19

30. Untuk seorang tertanggung, 5 klaim terjadi dengan besar 1,2,3,5, dan 13. Tentukan nilai dari Komogorov-Smirnov statistic untuk menguji goodness of fit dari $f(x|\vartheta=2)$.
    a. Kurang dari 0,05
    b. Antara 0,05 dan 0,10
    c. Antara 0,10 dan 0,15
    d. Antara 0,15 dan 0,20

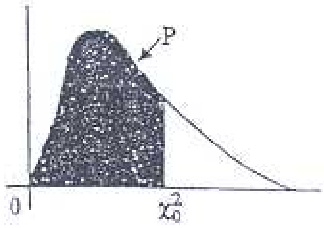
NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from -∞ to z, Pr(Z<z)
The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7681	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Values of z for selected values of Pr(Z<z)							
z	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
Pr(Z<z)	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995

χ^2 Distribution



The table below gives the value x_0^2 for which $P[x^2 < x_0^2] = P$ for a given number of degrees of freedom and a given value of P.

Degrees of Freedom	Values of P									
	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	---	---	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997

Excerpts from the Appendices to *Loss Models: From Data to Decisions, 2nd edition*

June 20, 2007

Appendix A

An Inventory of Continuous Distributions

A.1 Introduction

The incomplete gamma function is given by

$$\Gamma(\alpha;x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \quad \alpha > 0,\ x > 0$$

$$\text{with } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \quad \alpha > 0.$$

Also, define

$$G(\alpha;x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \quad x > 0.$$

At times we will need this integral for nonpositive values of α. Integration by parts produces the relationship

$$G(\alpha;x) = -\frac{x^\alpha e^{-x}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}G(\alpha+1;x)$$

This can be repeated until the first argument of G is $\alpha + k$, a positive number. Then it can be evaluated from

$$G(\alpha+k;x) = \Gamma(\alpha+k)[1-\Gamma(\alpha+k;x)]$$

The incomplete beta function is given by

$$\beta(a,b;x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt, \quad a > 0,\ b > 0,\ 0 < x < 1.$$

A.2 Transformed beta family

A.2.2 Three-parameter distributions

A.2.2.1 Generalized Pareto (beta of the second kind)—α, θ, τ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \frac{\theta^\alpha x^{\tau-1}}{(x+\theta)^{\alpha+\tau}} \qquad F(x) = \beta(\tau, \alpha; u), \quad u = \frac{x}{x+\theta} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau+k)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)}, \quad -\tau < k < \alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \tau(\tau+1)\cdots(\tau+k-1)}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau+k)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \beta(\tau+k, \alpha-k; u) + x^k[1-F(x)], \quad k > -\tau \\
\text{mode} &= \theta \frac{\tau-1}{\alpha+1}, \quad \tau > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.2.2 Burr (Burr Type XII, Singh-Maddala)—α, θ, γ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\gamma(x/\theta)^\gamma}{x[1+(x/\theta)^\gamma]^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1-u^\alpha, \quad u = \frac{1}{1+(x/\theta)^\gamma} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(1+k/\gamma)\Gamma(\alpha-k/\gamma)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -\gamma < k < \alpha\gamma \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(1+k/\gamma)\Gamma(\alpha-k/\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \beta(1+k/\gamma, \alpha-k/\gamma; 1-u) + x^k u^\alpha, \quad k > -\gamma \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\gamma-1}{\alpha\gamma+1}\right)^{1/\gamma}, \quad \gamma > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.2.3 Inverse Burr (Dagum)—τ, θ, γ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau\gamma(x/\theta)^{\gamma\tau}}{x[1+(x/\theta)^\gamma]^{\tau+1}} \qquad F(x) = u^\tau, \quad u = \frac{(x/\theta)^\gamma}{1+(x/\theta)^\gamma} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau+k/\gamma)\Gamma(1-k/\gamma)}{\Gamma(\tau)}, \quad -\tau\gamma < k < \gamma \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau+k/\gamma)\Gamma(1-k/\gamma)}{\Gamma(\tau)} \beta(\tau+k/\gamma, 1-k/\gamma; u) + x^k[1-u^\tau], \quad k > -\tau\gamma \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\tau\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/\gamma}, \quad \tau\gamma > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2 Transformed beta family

A.2.2 Three-parameter distributions

A.2.2.1 Generalized Pareto (beta of the second kind)—α, θ, τ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \frac{\theta^\alpha x^{\tau-1}}{(x+\theta)^{\alpha+\tau}} \qquad F(x) = \beta(\tau, \alpha; u), \quad u = \frac{x}{x+\theta} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau+k)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)}, \quad -\tau < k < \alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \tau(\tau+1)\cdots(\tau+k-1)}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau+k)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \beta(\tau+k, \alpha-k; u) + x^k[1-F(x)], \quad k > -\tau \\
\text{mode} &= \theta \frac{\tau-1}{\alpha+1}, \quad \tau > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.2.2 Burr (Burr Type XII, Singh-Maddala)—α, θ, γ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\gamma(x/\theta)^\gamma}{x[1+(x/\theta)^\gamma]^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1 - u^\alpha, \quad u = \frac{1}{1+(x/\theta)^\gamma} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(1+k/\gamma)\Gamma(\alpha-k/\gamma)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -\gamma < k < \alpha\gamma \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(1+k/\gamma)\Gamma(\alpha-k/\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \beta(1+k/\gamma, \alpha-k/\gamma; 1-u) + x^k u^\alpha, \quad k > -\gamma \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\gamma-1}{\alpha\gamma+1}\right)^{1/\gamma}, \quad \gamma > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.2.3 Inverse Burr (Dagum)—τ, θ, γ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau\gamma(x/\theta)^{\gamma\tau}}{x[1+(x/\theta)^\gamma]^{\tau+1}} \qquad F(x) = u^\tau, \quad u = \frac{(x/\theta)^\gamma}{1+(x/\theta)^\gamma} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau+k/\gamma)\Gamma(1-k/\gamma)}{\Gamma(\tau)}, \quad -\tau\gamma < k < \gamma \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau+k/\gamma)\Gamma(1-k/\gamma)}{\Gamma(\tau)} \beta(\tau+k/\gamma, 1-k/\gamma; u) + x^k[1-u^\tau], \quad k > -\tau\gamma \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\tau\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/\gamma}, \quad \tau\gamma > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.3 Two-parameter distributions

A.2.3.1 Pareto (Pareto Type II, Lomax)—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -1 < k < \alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k k!}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \frac{\theta}{\alpha-1}\left[1 - \left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^{\alpha-1}\right], \quad \alpha \neq 1 \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= -\theta \ln\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right), \quad \alpha = 1 \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}\beta[k+1, \alpha-k; x/(x+\theta)] + x^k\left(\frac{\theta}{x+\theta}\right)^\alpha, \quad \text{all } k \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}
$$

A.2.3.2 Inverse Pareto—τ, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau\theta x^{\tau-1}}{(x+\theta)^{\tau+1}} \qquad F(x) = \left(\frac{x}{x+\theta}\right)^\tau \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\tau+k)\Gamma(1-k)}{\Gamma(\tau)}, \quad -\tau < k < 1 \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k(-k)!}{(\tau-1)\cdots(\tau+k)}, \quad \text{if } k \text{ is a negative integer} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k\tau\int_0^{x/(x+\theta)} y^{\tau+k-1}(1-y)^{-k}dy + x^k\left[1 - \left(\frac{x}{x+\theta}\right)^\tau\right], \quad k > -\tau \\
\text{mode} &= \theta\frac{\tau-1}{2}, \quad \tau > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.3.3 Loglogistic (Fisk)—γ, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\gamma(x/\theta)^\gamma}{x[1+(x/\theta)^\gamma]^2} \qquad F(x) = u, \quad u = \frac{(x/\theta)^\gamma}{1+(x/\theta)^\gamma} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k\Gamma(1+k/\gamma)\Gamma(1-k/\gamma), \quad -\gamma < k < \gamma \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k\Gamma(1+k/\gamma)\Gamma(1-k/\gamma)\beta(1+k/\gamma, 1-k/\gamma; u) + x^k(1-u), \quad k > -\gamma \\
\text{mode} &= \theta\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/\gamma}, \quad \gamma > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.3.4 Paralogistic—α, θ

This is a Burr distribution with $\gamma = \alpha$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha^2(x/\theta)^\alpha}{x[1+(x/\theta)^\alpha]^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1 - u^\alpha, \quad u = \frac{1}{1+(x/\theta)^\alpha} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(1+k/\alpha)\Gamma(\alpha-k/\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -\alpha < k < \alpha^2 \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(1+k/\alpha)\Gamma(\alpha-k/\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\beta(1+k/\alpha, \alpha-k/\alpha; 1-u) + x^k u^\alpha, \quad k > -\alpha \\
\text{mode} &= \theta\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2+1}\right)^{1/\alpha}, \quad \alpha > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.3.5 Inverse paralogistic—τ, θ

This is an inverse Burr distribution with $\gamma = \tau$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau^2(x/\theta)^{\tau^2}}{x[1+(x/\theta)^\tau]^{\tau+1}} \qquad F(x) = u^\tau, \quad u = \frac{(x/\theta)^\tau}{1+(x/\theta)^\tau} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\tau+k/\tau)\Gamma(1-k/\tau)}{\Gamma(\tau)}, \quad -\tau^2 < k < \tau \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\tau+k/\tau)\Gamma(1-k/\tau)}{\Gamma(\tau)}\beta(\tau+k/\tau, 1-k/\tau; u) + x^k[1-u^\tau], \quad k > -\tau^2 \\
\text{mode} &= \theta(\tau-1)^{1/\tau}, \quad \tau > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.3 Transformed gamma family

A.3.2 Two-parameter distributions

A.3.2.1 Gamma—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)} \qquad F(x) = \Gamma(\alpha; x/\theta) \\
M(t) &= (1-\theta t)^{-\alpha}, \quad t < 1/\theta \qquad \mathrm{E}[X^k] = \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k > -\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k(\alpha+k-1)\cdots\alpha, \quad \text{if } k \text{ is an integer}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k[1-\Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k > -\alpha \\
&= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\theta^k\Gamma(\alpha+k; x/\theta) + x^k[1-\Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= \theta(\alpha-1), \quad \alpha > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.3.4 Paralogistic—α, θ

This is a Burr distribution with $\gamma = \alpha$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha^2 (x/\theta)^\alpha}{x[1+(x/\theta)^\alpha]^{\alpha+1}} \qquad F(x) = 1 - u^\alpha, \quad u = \frac{1}{1+(x/\theta)^\alpha} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(1+k/\alpha)\Gamma(\alpha - k/\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad -\alpha < k < \alpha^2 \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(1+k/\alpha)\Gamma(\alpha - k/\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \beta(1+k/\alpha, \alpha - k/\alpha; 1-u) + x^k u^\alpha, \quad k > -\alpha \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha^2 + 1} \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.2.3.5 Inverse paralogistic—τ, θ

This is an inverse Burr distribution with $\gamma = \tau$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau^2 (x/\theta)^{\tau^2}}{x[1+(x/\theta)^\tau]^{\tau+1}} \qquad F(x) = u^\tau, \quad u = \frac{(x/\theta)^\tau}{1+(x/\theta)^\tau} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau + k/\tau)\Gamma(1 - k/\tau)}{\Gamma(\tau)}, \quad -\tau^2 < k < \tau \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\tau + k/\tau)\Gamma(1 - k/\tau)}{\Gamma(\tau)} \beta(\tau + k/\tau, 1 - k/\tau; u) + x^k[1 - u^\tau], \quad k > -\tau^2 \\
\text{mode} &= \theta (\tau - 1)^{1/\tau}, \quad \tau > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.3 Transformed gamma family

A.3.2 Two-parameter distributions

A.3.2.1 Gamma—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)} \qquad F(x) = \Gamma(\alpha; x/\theta) \\
M(t) &= (1 - \theta t)^{-\alpha}, \quad t < 1/\theta \qquad \mathrm{E}[X^k] = \frac{\theta^k \Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k > -\alpha \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k (\alpha + k - 1) \cdots \alpha, \quad \text{if } k \text{ is an integer}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + k; x/\theta) + x^k [1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k > -\alpha \\
&= \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1) \theta^k \Gamma(\alpha + k; x/\theta) + x^k [1 - \Gamma(\alpha; x/\theta)], \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= \theta(\alpha - 1), \quad \alpha > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.3.2.2 Inverse gamma (Vinci)—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(\theta/x)^\alpha e^{-\theta/x}}{x\Gamma(\alpha)} \qquad F(x) = 1 - \Gamma(\alpha; \theta/x) \\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k < \alpha \qquad \mathrm{E}[X^k] = \frac{\theta^k}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)}[1 - \Gamma(\alpha - k; \theta/x)] + x^k \Gamma(\alpha; \theta/x) \\
&= \frac{\theta^k \Gamma(\alpha - k)}{\Gamma(\alpha)} G(\alpha - k; \theta/x) + x^k \Gamma(\alpha; \theta/x), \text{ all } k \\
\text{mode} &= \theta/(\alpha + 1)
\end{aligned}
$$

A.3.2.3 Weibull—θ, τ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau (x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x} \qquad F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^\tau} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1 + k/\tau), \quad k > -\tau \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(1 + k/\tau) \Gamma[1 + k/\tau; (x/\theta)^\tau] + x^k e^{-(x/\theta)^\tau}, \quad k > -\tau \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\tau - 1}{\tau} \right)^{1/\tau}, \quad \tau > 1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.3.2.4 Inverse Weibull (log Gompertz)—θ, τ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau (\theta/x)^\tau e^{-(\theta/x)^\tau}}{x} \qquad F(x) = e^{-(\theta/x)^\tau} \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k \Gamma(1 - k/\tau), \quad k < \tau \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(1 - k/\tau)\{1 - \Gamma[1 - k/\tau; (\theta/x)^\tau]\} + x^k \left[1 - e^{-(\theta/x)^\tau}\right], \quad \text{all } k \\
&= \theta^k \Gamma(1 - k/\tau) G[1 - k/\tau; (\theta/x)^\tau] + x^k \left[1 - e^{-(\theta/x)^\tau}\right] \\
\text{mode} &= \theta \left(\frac{\tau}{\tau + 1} \right)^{1/\tau}
\end{aligned}
$$

A.3.3 One-parameter distributions

A.3.3.1 Exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta} \qquad F(x) = 1 - e^{-x/\theta} \\
M(t) &= (1 - \theta t)^{-1} \qquad \mathrm{E}[X^k] = \theta^k \Gamma(k + 1), \quad k > -1 \\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k k!, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= \theta(1 - e^{-x/\theta}) \\
\mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \theta^k \Gamma(k + 1) \Gamma(k + 1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k > -1 \\
&= \theta^k k! \Gamma(k + 1; x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k \text{ an integer} \\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}
$$

A.3.2.2 Inverse gamma (Vinci)—α, θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(\theta/x)^\alpha e^{-\theta/x}}{x\Gamma(\alpha)} \qquad F(x) = 1 - \Gamma(\alpha; \theta/x)\\
\mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k<\alpha \qquad \mathrm{E}[X^k] = \frac{\theta^k}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer}\\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}[1-\Gamma(\alpha-k;\theta/x)] + x^k\Gamma(\alpha;\theta/x)\\
&= \frac{\theta^k\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}G(\alpha-k;\theta/x) + x^k\Gamma(\alpha;\theta/x), \text{ all } k\\
\text{mode} &= \theta/(\alpha+1)
\end{aligned}
$$

A.3.2.3 Weibull—θ, τ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau(x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x} \qquad F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^\tau}\\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k\Gamma(1+k/\tau), \quad k>-\tau\\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \theta^k\Gamma(1+k/\tau)\Gamma[1+k/\tau;(x/\theta)^\tau] + x^k e^{-(x/\theta)^\tau}, \quad k>-\tau\\
\text{mode} &= \theta\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^{1/\tau}, \quad \tau>1, \text{ else } 0
\end{aligned}
$$

A.3.2.4 Inverse Weibull (log Gompertz)—θ, τ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\tau(\theta/x)^\tau e^{-(\theta/x)^\tau}}{x} \qquad F(x) = e^{-(\theta/x)^\tau}\\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k\Gamma(1-k/\tau), \quad k<\tau\\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \theta^k\Gamma(1-k/\tau)\{1-\Gamma[1-k/\tau;(\theta/x)^\tau]\} + x^k\left[1-e^{-(\theta/x)^\tau}\right], \quad \text{all } k\\
&= \theta^k\Gamma(1-k/\tau)G[1-k/\tau;(\theta/x)^\tau] + x^k\left[1-e^{-(\theta/x)^\tau}\right]\\
\text{mode} &= \theta\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{1/\tau}
\end{aligned}
$$

A.3.3 One-parameter distributions

A.3.3.1 Exponential—θ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{-x/\theta}}{\theta} \qquad F(x) = 1 - e^{-x/\theta}\\
M(t) &= (1-\theta t)^{-1} \qquad \mathrm{E}[X^k] = \theta^k\Gamma(k+1), \quad k>-1\\
\mathrm{E}[X^k] &= \theta^k k!, \quad \text{if } k \text{ is an integer}\\
\mathrm{E}[X\wedge x] &= \theta(1-e^{-x/\theta})\\
\mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \theta^k\Gamma(k+1)\Gamma(k+1;x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k>-1\\
&= \theta^k k!\Gamma(k+1;x/\theta) + x^k e^{-x/\theta}, \quad k \text{ an integer}\\
\text{mode} &= 0
\end{aligned}
$$

A.3.3.2 Inverse exponential—θ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\theta e^{-\theta/x}}{x^2} \qquad F(x) = e^{-\theta/x} \\ \mathrm{E}[X^k] &= \theta^k\Gamma(1-k), \quad k<1 \\ \mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \theta^k G(1-k;\theta/x) + x^k(1-e^{-\theta/x}), \quad \text{all } k \\ \text{mode} &= \theta/2 \end{aligned}$$

A.4 Other distributions

A.4.1.1 Lognormal—μ,σ (μ can be negative)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2/2) = \phi(z)/(\sigma x), \quad z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \qquad F(x) = \Phi(z) \\ \mathrm{E}[X^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2) \\ \mathrm{E}[(X\wedge x)^k] &= \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2)\Phi\left(\frac{\ln x - \mu - k\sigma^2}{\sigma}\right) + x^k[1-F(x)] \\ \text{mode} &= \exp(\mu - \sigma^2) \end{aligned}$$

A.4.1.2 Inverse Gaussian—μ,θ

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\theta}{2\pi x^3}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\theta z^2}{2x}\right), \quad z = \frac{x-\mu}{\mu} \\ F(x) &= \Phi\left[z\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2}\right] + \exp\left(\frac{2\theta}{\mu}\right)\Phi\left[-y\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2}\right], \quad y = \frac{x+\mu}{\mu} \\ M(t) &= \exp\left[\frac{\theta}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2t\mu^2}{\theta}}\right)\right], \quad t < \frac{\theta}{2\mu^2}, \qquad \mathrm{E}[X] = \mu, \quad \mathrm{Var}[X] = \mu^3/\theta \\ \mathrm{E}[X\wedge x] &= x - \mu z\Phi\left[z\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2}\right] - \mu y\exp\left(\frac{2\theta}{\mu}\right)\Phi\left[-y\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2}\right] \end{aligned}$$

A.4.1.3 log-t—r,μ,σ (*μ can be negative*)

Let Y have a t distribution with r degrees of freedom. Then $X = \exp(\sigma Y + \mu)$ has the log-t distribution. Positive moments do not exist for this distribution. Just as the t distribution has a heavier tail than the normal distribution, this distribution has a heavier tail than the lognormal distribution.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{x\sigma\sqrt{\pi r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\left[1+\frac{1}{r}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]^{(r+1)/2}}, \\ F(x) &= F_r\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \text{ with } F_r(t) \text{ the cdf of a } t \text{ distribution with } r \text{ d.f.,} \end{aligned}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta\left[\frac{r}{2}, \frac{1}{2}; \frac{r}{r + \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}\right], & 0 < x \le e^\mu, \\ 1 - \frac{1}{2}\beta\left[\frac{r}{2}, \frac{1}{2}; \frac{r}{r + \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}\right], & x \ge e^\mu. \end{cases}$$

A.4.1.4 Single-parameter Pareto—α, θ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x > \theta & F(x) &= 1 - (\theta/x)^\alpha, \quad x > \theta \\ \mathrm{E}[X^k] &= \frac{\alpha\theta^k}{\alpha - k}, \quad k < \alpha & \mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\alpha\theta^k}{\alpha - k} - \frac{k\theta^\alpha}{(\alpha - k)x^{\alpha-k}}, \quad x \ge \theta \\ \text{mode} &= \theta \end{aligned}$$

Note: Although there appears to be two parameters, only α is a true parameter. The value of θ must be set in advance.

A.5 Distributions with finite support

For these two distributions, the scale parameter θ is assumed known.

A.5.1.1 Generalized beta—a, b, θ, τ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^a (1-u)^{b-1} \frac{\tau}{x}, \quad 0 < x < \theta, \quad u = (x/\theta)^\tau \\ F(x) &= \beta(a, b; u) \\ \mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(a+b)\Gamma(a+k/\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k/\tau)}, \quad k > -a\tau \\ \mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(a+b)\Gamma(a+k/\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k/\tau)} \beta(a+k/\tau, b; u) + x^k[1 - \beta(a, b; u)] \end{aligned}$$

A.5.1.2 beta—a, b, θ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^a (1-u)^{b-1} \frac{1}{x}, \quad 0 < x < \theta, \quad u = x/\theta \\ F(x) &= \beta(a, b; u) \\ \mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k \Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}, \quad k > -a \\ \mathrm{E}[X^k] &= \frac{\theta^k a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}, \quad \text{if } k \text{ is an integer} \\ \mathrm{E}[(X \wedge x)^k] &= \frac{\theta^k a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)} \beta(a+k, b; u) \\ &\quad + x^k[1 - \beta(a, b; u)] \end{aligned}$$